

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI "ROMA TRE"
CORSO DI STUDI IN MATEMATICA
IN2 - MODELLI DI CALCOLO – A.A. 2002-2003
M. PEDICINI

ESONERO DEL 23/01/2003 – TEMPO 3H00

COGNOME _____ NOME _____ MATRICOLA _____

Esercizio 1. Notazioni: sia V l'insieme delle variabili del lambda calcolo, e sia

$$L(V) = \{\langle v_1, \dots, v_n \rangle \mid n \geq 0, v_i \in V\}$$

l'insieme delle liste (eventualmente vuote) di variabili; su $L(V)$ si considerino le usuali operazioni sulle liste: se $l = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ allora abbiamo la testa $\text{head}(l) = a_1$, la coda $\text{tail}(l) = \langle v_2, \dots, v_n \rangle$, la append $v :: l = \langle v, v_1, \dots, v_n \rangle$, e infine $l_1 \leq l_2$, se l_1 è segmento iniziale di l_2 .

Definita la seguente funzione $\text{bord} : \Lambda \rightarrow L(V)$ come

$$\text{bord}(u) = \begin{cases} \langle \rangle & \text{se } u \in V \\ x :: \text{bord}(t) & \text{se } u = \lambda x t \\ \text{tail}(\text{bord}(t)) & \text{se } u = (t)v \text{ e } \text{bord}(t) \neq \langle \rangle \\ \langle \rangle & u = (t)v \text{ e } \text{bord}(t) = \langle \rangle \end{cases}$$

risolvere i seguenti quesiti:

- calcolare $\text{bord}(((\lambda x \lambda y t)u)v)$ e $\text{bord}(((\lambda z (\lambda x \lambda y t)u)v)w)$ supponendo $t, u, v, w \in V$;
- mostrare che per ogni lambda termine t se x appare in $\text{bord}(t)$, allora x è una variabile legata;
- se x è una variabile legata di t , non necessariamente x appare in $\text{bord}(t)$;
- mostrare per induzione strutturale sui lambda termini che per ogni coppia di lambda termini u e v , e per ogni variabile x si ha $\text{bord}(v) \leq \text{bord}(v[u/x])$ con $FV(u) \cap BV(v) = \emptyset$.
- mostrare che se $u \rightarrow_{\beta} u'$ allora $\text{bord}(u) \leq \text{bord}(u')$.

Esercizio 2. Date le seguenti definizioni di classi java:

```
abstract class polygon {
    abstract function printCharacteristic();
}

class rectangle extends polygon {
    function printCharacteristic() {
        print("All my angles are 90 degrees and my opposite sides are equal");
    }
}

class square extends polygon {
    function printCharacteristic() {
        print("All my angles are 90 degrees and all my sides are equal");
    }
}
```

Spiegare l'esecuzione e l'output delle seguenti istruzioni:

```
var shape1 : polygon = new rectangle;
var shape2 : polygon = new square;

shape1.printCharacteristics();
shape2.printCharacteristics();
```

Esercizio 3. Rappresentare le coppie di lambda termini $\langle u, v \rangle = \lambda z(z)uv$ e induttivamente le n -uple:

$$\langle u_1, \dots, u_n \rangle = \begin{cases} \mathbf{nil} & \text{se } n = 0 \\ \langle u_1, \langle u_2, \dots, u_n \rangle \rangle & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

In particolare, sia $\mathbf{nil} = \lambda d \mathbb{T}$, e $\mathbf{isnil} = \lambda p(p)\lambda h \lambda t \mathbb{F}$.

a) Costruire un lambda termine ρ che inverte gli elementi di una coppia, ovvero tale che $(\rho)\langle a, b \rangle \rightarrow_{\beta} \langle b, a \rangle$.

b) Dare i termini che rappresentano **head** e **tail** di una n -upla.

c) Verificare che $(\mathbf{isnil})\mathbf{nil} = \mathbb{T}$ e $(\mathbf{isnil})\langle u, v \rangle = \mathbb{F}$.

d) Costruire un lambda termine M per cui

$$(M)\langle u_1, \dots, u_n \rangle = \langle (M)\langle u_2, \dots, u_n \rangle, u_1 \rangle.$$

e) Dare un punto fisso di M .

f) Costruire un lambda termine **reverse** che inverte gli elementi di una n -upla, ovvero tale che

$$(\mathbf{reverse})\langle u_1, \dots, u_n \rangle \rightarrow_{\beta} \langle u_n, \dots, u_1 \rangle.$$

(sugg.: modificare il termine trovato al punto e) utilizzando un test \mathbf{isnil} per arrestare l'iterazione).