UNIVERSITÀ DEGLI STUDI "ROMA TRE"
CORSO DI STUDI IN MATEMATICA
IN2 - MODELLI DI CALCOLO – A.A. 2002-2003

M. PEDICINI

FOGLIO N. 2 – CONSEGNA DELL'ELABORATO 25/01/2003

Esercizio 1. *Svolgere i seguenti quesiti:*

(1) *Sia per definizione la rappresentazione della coppia di due lambda-termini u e v:*
$$\langle u, v\rangle = \lambda x(x)u\,v.$$
Definire i lambda termini π_1, π_2 che rappresentano le funzioni proiezione, ovvero tali che
$$(\pi_1)\langle u, v\rangle \simeq_\beta u,$$
e
$$(\pi_2)\langle u, v\rangle \simeq_\beta v.$$

(2) *Dati i lambda termini u_1, u_2, v_1 e v_2 dimostrare che*
$$(\langle u_1, v_1\rangle)\langle u_2, v_2\rangle \simeq_\beta (u_1)u_2v_2v_1.$$

(3) *Date le rappresentazioni per i booleani*
$$\mathbb{T} = \lambda x\lambda yx \qquad (true)$$
e
$$\mathbb{F} = \lambda x\lambda yy \qquad (false)$$
definire un lambda termine M per cui valgono le seguenti proprietà:
$$\langle M, \mathbb{F}\rangle\langle M, \mathbb{F}\rangle \rightarrow_\beta \langle M, \mathbb{F}\rangle$$
$$\langle M, \mathbb{F}\rangle\langle M, \mathbb{T}\rangle \rightarrow_\beta \langle M, \mathbb{F}\rangle$$
$$\langle M, \mathbb{T}\rangle\langle M, \mathbb{F}\rangle \rightarrow_\beta \langle M, \mathbb{F}\rangle$$
$$\langle M, \mathbb{T}\rangle\langle M, \mathbb{T}\rangle \rightarrow_\beta \langle M, \mathbb{T}\rangle$$

(4) *Un sistema di numerazione per il lambda calcolo è una funzione biunivoca che associa ad ogni numero $n \in \mathbb{N}$ un lambda termine $\underline{n}$ che lo rappresenta.*
Un sistema di numerazione si dice adeguato *se è possibile rappresentare in esso le funzioni:*
$$iszero, succ, pred$$
dove $(iszero)\underline{n} \rightarrow_\beta \mathbb{T}$ se $n = 0$ e $(iszero)\underline{n} \rightarrow_\beta \mathbb{F}$ se $n \neq 0$. $(succ)\underline{n} \rightarrow_\beta \underline{n+1}$ per ogni n. $(pred)\underline{n} \rightarrow_\beta \underline{n-1}$ se $n > 1$ e $(pred)\underline{n} \rightarrow_\beta \underline{0}$ per $n \leq 1$.
Fissata la rappresentazione binaria *per gli interi, definita come segue:*
$$n = \sum_{i=0}^{k} b_i 2^i \text{ con } b_i \in \{0,1\} \;\mapsto \lambda x_1\lambda x_0(x_{b_k})x_{b_{k-1}}\ldots x_{b_0}$$
dimostrare che questa costituisce un sistema adeguato.

(5) *Dedurre dal punto precedente che è possibile codificare tutte le funzioni ricorsive utilizzando il sistema di numerazione definito qui sopra.*

Esercizio 2. *Seguendo l'ultimo punto dell'esercizio precedente, programmare in java due classi:*

(1) *una classe astratta che ha come metodi le funzioni che determinano un sistema adeguato;*
(2) *una classe derivata dalla precedente, che implementa le funzioni base e gli schemi che definiscono le funzioni ricorsive a partire dalla classe adeguata.*

Esercizio 3. *(facoltativo) Considerare la definizione di forte rappresentazione per le funzioni ricorsive (una rappresentazione e' forte se nel caso una funzione f non sia definita per un valore n, il termine $(\underline{f})\underline{n}$ non è risolubile).*

Analizzare il sistema definito al punto 1 rispetto alla nozione di forte rappresentabilità.