

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI "ROMA TRE"
CORSO DI STUDI IN MATEMATICA
IN2 - MODELLI DI CALCOLO – A.A. 2003-2004
M. PEDICINI

FOGLIO N. 1 – CONSEGNA DELL'ELABORATO 28/11/2003

Dato un alfabeto A , un sistema di Thue (abbreviato con TS) di alfabeto A è un sottoinsieme finito J dell'insieme delle coppie ordinate di parole di A :

$$J \subset A^* \times A^*.$$

Sia $w \in A^*$, e sia $\rho \in J$ si definisce l'azione di $\rho = (x, y)$ su una fattorizzazione $w = uxv$ di w come il risultato della sostituzione della sotto-parola x di w con la parola y :

$$\rho_u(w) = uyv.$$

Una computazione di un TS J a partire da una parola w è una sequenza di azioni di J :

$$\rho_1(w_0), \rho_2(w_1), \dots, \rho_n(w_{n-1}), \dots$$

dove $w_0 = w$ e $w_k = \rho_k(w_{k-1})$.

Esercizio 1. *Mostrare che i TS possono rientrare nel quadro degli algoritmi formali (definire la nozione di algoritmo associato ad un TS).*¹

Esercizio 2. *Si consideri l'alfabeto $A = \{0, 1\}$ ed il seguente sistema di Thue*

$$J = \{(0, 01), (1, 10)\}$$

e sia $w_i \in A^$ la sequenza di parole definita nel modo seguente*

$$\begin{cases} w_0 = 0 \\ w_{i+1} = w_i \bar{w}_i \end{cases}$$

dove $\bar{w} = \bar{a}_1 \dots \bar{a}_n$ se $w = a_1 \dots a_n$.²

- (1) *Dimostrare che a partire da w_i il sistema J computa la parola w_{i+1} .*
- (2) *Trovare una macchina di Turing ad un nastro che prende in input k e computa w_k .*
- (3) *Valutare il tempo di arresto della macchina trovata al punto precedente.*

Esercizio 3. *Un k -TS è un sistema di Thue J tale che k è la cardinalità di J .*

- (1) *Dimostrare che dato un generico 1-TS esiste una macchina di Turing che ne simula la computazione.*
- (2) *Dimostrare che se μ è una macchina di Turing che simula la computazione associata ad un k -TS J su A allora esiste una macchina di Turing μ' che simula la computazione associata al sistema $J' = J \cup \{(a, w)\}$ con $a \in A$ e $w \in A^*$.*

Esercizio 4. *Dare una classe java che computa la sequenza di Thue-Morse per mezzo dell'algoritmo ricavato all'esercizio 2.*

¹Si noti che a partire da una parola w per un dato TS più azioni potrebbero essere applicabili, dando origine ad un sistema di calcolo non-deterministico. Nel seguito dell'esercizio è necessario specificare come eliminare tale non determinismo al fine di ottenere un sistema simulabile con un modello di calcolo deterministico come quello delle macchine di Turing.

²la sequenza infinita di 0 e 1 che ha w_i come sua parte iniziale per ogni i si dice sequenza di Thue-Morse.