UNIVERSITÀ DEGLI STUDI "ROMA TRE"
CORSO DI STUDI IN MATEMATICA
IN2 - MODELLI DI CALCOLO – A.A. 2003-2004

M. PEDICINI

ESONERO DEL 7/11/2003 – TEMPO 3H00

COGNOME ____________________ NOME ____________________ MATRICOLA _______________

NEL 1950, SALEM FORMULÒ LA SEGUENTE QUESTIONE: È POSSIBILE TROVARE UNA SUCCESSIONE $(c_i) \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ TALE CHE ESISTA $\rho>0$ PER CUI PER OGNI N SI ABBIA

$$\sqrt{N} \leq \sup_{\theta\in[0,1]} \left| \sum_{n<N} c_i e(n\theta) \right| \leq c\sqrt{N}$$

CON $e(x) = e^{2i\pi x}$.

QUALCHE ANNO PIÙ TARDI IN MODO INDIPENDENTE SHAPIRO NEL 1951 E W. RUDIN NEL 1959 SCOPRIRONO LA SEQUENZA CHE OGGI PORTA IL LORO NOME, E CHE È DEFINITA NEL MODO SEGUENTE:

$$\begin{cases} c_0 = 1 \\ c_{2n} = c_n \\ c_{2n+1} = (-1)^n c_n \end{cases} \tag{1}$$

SI CONSIDERI LA FUNZIONE COSÌ DEFINITA:

$$RS(n) = (c_0, c_1, \ldots, c_n)$$

DOVE (c_i) È COME SOPRA LA SEQUENZA DI RUDIN-SHAPIRO.

SI CONSIDERI L'ALFABETO FINITO $A = \{-1,0,1\}$ E SI RISOLVANO IN MODO ESAURIENTE I SEGUENTI ESERCIZI.

Esercizio 1. *Dimostrare che la funzione RS è computabile tramite macchina RAM.*

Esercizio 2. *Dare una TM che a partire da una parola $w \in A$ computa la parola ww.*

Esercizio 3. *(facoltativo) Dimostrare per induzione su n che per ogni coppia di interi non negativi a e b tale che $b < 2^n$ si ha*

$$c_{a2^{n+1}+b} = c_a c_b.$$

Esercizio 4. *Utilizzando i punti precedenti: dimostrare che l'insieme*

$$X = \{RS(n) | n \in \mathbb{N}\} \subset A^*$$

è Turing computabile.

Esercizio 5. *Fornire una maggiorazione per il tempo di arresto della macchina trovata.*

Esercizio 6. *Si supponga nota una MdT μ che computa il successore $n+1$ di un numero intero n in notazione binaria.*

Si assuma inoltre la seguente proprietà della sequenza di Rudin-Shapiro:

$$c_n = (-1)^{\sum_{i\geq 0} n_i n_{i+1}} \tag{2}$$

dove n_i è la cifra i-esima della rappresentazione binaria di n.

Utilizzare proprietà 2 per fornire una MdT di alfabeto A che computa gli elementi di X in modo più efficace.