UNIVERSITÀ DEGLI STUDI "ROMA TRE"
CORSO DI STUDI IN MATEMATICA
IN2 - MODELLI DI CALCOLO – A.A. 2003-2004

M. PEDICINI

SOLUZIONI ESONERO DEL 14/1/2004 – TEMPO 3H00

Esercizio 1. *Considerare il lambda termine*

$$t = (\lambda x(\lambda y(z)(\lambda zw)(x)x)(x)x)\lambda x(x)x$$

e rispondere ai seguenti quesiti:

(1) *calcolare gli insiemi $FV(t)$ e $BV(t)$;*
Soluzione. $FV(t) = \{z, w\}$ e $BV(t) = \{x, y, z\}$. □

(2) *fornire un termine t' alpha-equivalente a t;*
Soluzione.

$$t = (\lambda a(\lambda y(z)(\lambda zw)(a)a)(a)a)\lambda x(x)x$$

□

(3) *dire se t è un termine chiuso;*
Soluzione. no, infatti $FV(t) = \{z, w\}$ e per definizione t è chiuso solo se $FV(t)$ è vuoto. □

(4) *dire se t è in forma normale;*
Soluzione. no, infatti t è esso stesso un redesso; contiene poi anche i redessi $(\lambda y(z)(\lambda zw)(x)x)(x)x$ e $(\lambda zw)(x)x$ □

(5) *dire se t è in forma normale di testa;*
Soluzione. no, t stesso è un redesso di testa □

(6) *dire se t è risolubile (in caso affermativo, ricordare la definizione di termine risolubile e mostrare come essa si applica a t);*
Soluzione.

$$\begin{aligned} t &\to_\beta (\lambda y(z)(\lambda zw)(\lambda x(x)x)\lambda x(x)x)(\lambda x(x)x)\lambda x(x)x \\ &\to_\beta (z)(\lambda zw)(\lambda x(x)x)\lambda x(x)x \\ &\to_\beta (z)w. \end{aligned}$$

Poichè $t \simeq_\beta (z)w$ allora nella definizione di risolubilità abbiamo che per ogni u devono esistere dei termini $t_1, \dots, t_k$ delle variabili distinte $x_1, \dots, x_k$ e dei termini $v_1 \dots v_s$ per cui

$$(t[t_1/x_1, \dots, t_k/x_k])v_1 \dots v_s \simeq_\beta u$$

nel nostro caso basterà porre $k = 2$, $s = 0$, $t_1 = I$, $t_2 = u$, $x_1 = z$ e $x_2 = w$ quindi avremo che poichè $t \simeq_\beta (z)w$ e la $\simeq_\beta$ passa al contesto

$$t[I/z, u/w] \simeq_\beta (z)w[I/z, u/w] \simeq_\beta (I)u \simeq_\beta u.$$

□

(7) *dire se t è normalizzabile;*
Soluzione. vedi il punto precedente $t \to_\beta (z)w$. □

(8) dire se t è fortemente normalizzabile;

Soluzione. No, poichè dopo aver ridotto il primo redesso si formano due copie del termine $(\lambda x(x)x)\lambda x(x)x$ che non sono normalizzabili e quindi scegliendo di ridurre questo redesso generano un cammino di β-riduzione infinita per t □

(9) dare la rappresentazione sotto forma di grafo sintattico di t.

Esercizio 2. *Si consideri la sequenza di Thue-Morse (c_i) dove $c_i \in \{0,1\}$ e tale che $w_i = c_0c_1 \dots c_{2^i-1}$ è definita da :*

$$w_i = \begin{cases} 0 & \text{i=0} \\ w_{i-1}\overline{w_{i-1}} & \text{i>0} \end{cases}$$

dove $\overline{w}$ è la sequenza complementare di w ossia ottenuta scambiando 0 con 1 e viceversa.

(1) fissare una rappresentazione nel lambda calcolo per gli elementi di $A = \{0,1\}$ e per le sequenze di elementi di A;

Soluzione. Rappresentiamo gli elementi di A con i due termini

$$\underline{0} = \lambda x_0 \lambda x_1 x_i \qquad \text{i = 0,1}$$

mentre rappresentiamo $\alpha_1 \dots \alpha_n \in A^*$ con

$$\underline{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \lambda x_0 \lambda x_1 \lambda x(x_{\alpha_1}) \dots (x_{\alpha_n})x.$$

□

(2) trovare i lambda termini `complement` e `concat` che rappresentano rispettivamente il complemento e la concatenazione di una sequenza di elementi di A;

Soluzione.

$$\texttt{complement} = \lambda w \lambda x_0 \lambda x_1 \lambda x(w)x_1x_0x.$$

$$\texttt{concat} = \lambda w_1 \lambda w_2 \lambda x_0 \lambda x_1 \lambda x(w_1)x_0x_1(w_2)x_0x_1x,$$

□

(3) dare il lambda termine che rappresenta la funzione $f : A^* \to A^*$ tale che

$$f(w) = w\overline{w};$$

Soluzione.

$$\underline{f} = \lambda w(\texttt{concat})w(\texttt{complement})w$$

□

(4) a partire dal punto precedente dare il lambda termine che rappresenta la funzione $\tau : \mathbb{N} \to A^*$ e tale che $\tau(n) = w_n$.

Soluzione.

$$\underline{\tau} = \lambda n(n)\underline{f}\lambda x_0 \lambda x_1 \lambda x x_0.$$

□

Esercizio 3. *Sia fissato l'alfabeto $A = \{0,1\}$ e si consideri la nozione di problema decidibile per automa finito su A.*

Dopo aver fissato un'opportuna rappresentazione per gli elementi di A e per le parole finite su A, dare una rappresentazione degli automi finiti e della computazione relativa ad essi nel lambda calcolo.

Più precisamente, fissato un generico automa $\mathcal{A}$ trovare una codifica $\underline{a}$ per $a \in A$ e $\underline{w}$ per le parole $w \in A^*$ ed un lambda termine $t_{\mathcal{A}}$ che lo rappresenta; ovvero, tale che per ogni parola di input w se $\mathcal{A}(w)$ è accettante (risp. non accettante) allora $(t_{\mathcal{A}})\underline{w} \simeq_\beta \underline{1}$ (risp. $(t_{\mathcal{A}})\underline{w} \simeq_\beta \underline{0}$).

Soluzione. Sia fissata la rappresentazione di un generico $a_i \in A = \{a_1 \dots a_n\}$

$$\underline{a_i} = \lambda x_{a_1} \dots \lambda x_{a_n} x_{a_i}$$

e

$$\underline{\alpha_1 \dots \alpha_l} = \lambda x_{a_1} \dots \lambda x_{a_n} \lambda x (x_{\alpha_1} \dots (x_{\alpha_l}) x$$

per una generica parola $\alpha_1 \dots \alpha_l \in A^*$.

E sia $\mathcal{A}$ un automa di alfabeto A e insieme degli stati $Q = \{q_0, \dots, q_d\}$, con q_0 stato finale.

L'automa è per definizione una funzione da $T : Q \times A \to \tilde{Q}$ dunque per defінzione in funzione del carattere letto e dello stato corrente dovrà determinare lo stato successivo sino a giungere alla fine della parola di input.

Dunque programmiamo un lambda termine τ che rappresenta la funzione di due argomenti T una volta fissata la rappresentazione per gli elementi di A e per gli stati Q; la rappresentazione per gli elementi dell'alfabeto è già stata fissata, fissiamo un'analoga rappresentazione per gli stati di Q

$$\underline{q_i} = \lambda q_0 \dots \lambda q_d q_i.$$

$$\tau = \lambda a \lambda q (\dots ((a)(q)\underline{T_{a_1,q_0}} \dots \underline{T_{a_1,q_d}})(q)\underline{T_{a_2,q_0}} \dots \underline{T_{a_2,q_d}}) \dots (q)\underline{T_{a_n,q_0}} \dots \underline{T_{a_n,q_d}}$$

e infatti

$$\begin{aligned}
&(\tau)\underline{a_i}\underline{q_j} \\
&\quad \to_\beta (\dots ((\underline{a_i})(\underline{q_j})\underline{T_{a_1,q_0}} \dots \underline{T_{a_1,q_d}})(q_j)\underline{T_{a_2,q_0}} \dots \underline{T_{a_2,q_d}}) \dots (q_j)\underline{T_{a_n,q_0}} \dots \underline{T_{a_n,q_d}} \\
&\quad = (\dots ((\lambda a_1 \dots \lambda a_n a_i)(\underline{q_j})\underline{T_{a_1,q_0}} \dots \underline{T_{a_1,q_d}})(\underline{q_j})\underline{T_{a_2,q_0}} \dots \underline{T_{a_2,q_d}}) \dots (\underline{q_j})\underline{T_{a_n,q_0}} \dots \underline{T_{a_n,q_d}} \\
&\quad \to_\beta (\underline{q_j})\underline{T_{a_i,q_0}} \dots \underline{T_{a_i,q_d}} \\
&\quad = (\lambda q_0 \dots \lambda q_d q_j)\underline{T_{a_i,q_0}} \dots \underline{T_{a_i,q_d}} \\
&\quad \to_\beta \underline{T_{a_i,q_j}}
\end{aligned}$$

Allora se applichiamo al lambda termine che rappresenta la parola w i termini $(\tau)\underline{a}_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$ ed il termine che rappresenta lo stato iniziale $\underline{q_0}$ avremo che

$$\begin{aligned}
(\underline{w})(\tau)\underline{a}_1 \dots (\tau)\underline{a}_n\underline{q_0} &= (\lambda x_{a_1} \dots \lambda x_{a_n} \lambda x (x_{\alpha_1}) \dots (x_{\alpha_l}) x)(\tau)\underline{a}_1 \dots (\tau)\underline{a}_n\underline{q_0} \\
&\to_\beta ((\tau)\underline{\alpha_1}) \dots ((\tau)\underline{\alpha_l})\underline{q_0} \\
&\to_\beta ((\tau)\underline{\alpha_1}) \dots ((\tau)\underline{\alpha_{l-1}})\underline{T(\alpha_l, q_0)} \\
&\to_\beta \underline{T(\alpha_1, T(\alpha_2, \dots T(\alpha_{l-1}, T(\alpha_l, q_0)) \dots))}
\end{aligned}$$

Poichè uno stato non è altro che un selettore, per distinguere uno stato accettante da uno non accettante sarà sufficiente applicare lo stato ad una sequenza di termini $\underline{0}$ oppure $\underline{1}$, in accordo con il valore di $F(q)$. Dunque l'automa è rappresentato dal seguente lambda termine

$$\underline{\mathcal{A}} = \lambda w (w)(\tau)\underline{a_1} \dots (\tau)\underline{a_n}\underline{F(q_0)} \dots \underline{F(q_d)}.$$

□