

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI "ROMA TRE"
CORSO DI STUDI IN MATEMATICA
IN2 - MODELLI DI CALCOLO – A.A. 2005-2006
M. PEDICINI

ESONERO DEL 4/11/2005 – TEMPO 3H00

COGNOME _____ NOME _____ MATRICOLA _____

Esercizio 1. Sia $A = \{0, 1\}$ e sia $X \subset \tilde{A}^*$, se $\tilde{A} = A \cup \{\square\}$, è così definito:

$$X = \{w_1 \square w_2 \square w_3 \mid w_i \in A^*, i = 1, \dots, 3\},$$

dove per ogni $w_1, w_2 \in A^*$ si ha che w_3 è la rappresentazione binaria del prodotto del numero rappresentato in binario da w_1 moltiplicato il numero rappresentato in binario da w_2 (ovvero X è il grafico della funzione prodotto tra interi rappresentati in binario).

Dimostrare che per ogni $c > 0$, $X \notin DTIME_1^A(cn)$.

Esercizio 2. Dimostrare che se lo spazio di arresto per una macchina di Turing di alfabeto A con input $w \in A^*$ è $k \log_2 |w|$ allora la macchina necessariamente appartiene alla classe $DTIME_1^A(cn^{k'})$, stimare le costanti c e k' in funzione dei parametri della macchina.

Esercizio 3. (1) Dimostrare che la funzione $\log_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definita come

$$\log_2(x) = \begin{cases} y & \text{se } x = 2^y, \\ \perp & \text{negli altri casi,} \end{cases}$$

che computa il logaritmo con base 2 ristretto ai naturali è una funzione ricorsiva.

Esercizio 4. Si fissi l'alfabeto $A = \{0, 1\}$ e siano $F : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ e $G : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ si definisca

$$H(x, y) = F(G(H(x_0, y_0), c_1), G(H(x_1, y_1), c_2))$$

con $x = x_0 + 2^{n/2}x_1$ e $y = y_0 + 2^{n/2}y_1$ ed n è il massimo delle lunghezze delle rappresentazioni binarie di x ed y , e dove $F \in DTIME_1^A(k_1n)$ e $G \in DTIME_1^A(k_2n^2)$ sono funzioni computabili a partire dalle rappresentazioni binarie dell'input.

Dimostrare che $H \in DTIME_1^A(cn^k)$, stimare le costanti c e k .