

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI "ROMA TRE"
CORSO DI STUDI IN MATEMATICA
IN2 - MODELLI DI CALCOLO – A.A. 2006-2007
M. PEDICINI

APPELLO A DEL 23/01/2007 – TEMPO 3H00

COGNOME _____ NOME _____ MATRICOLA _____

Esercizio 1. Si consideri l'alfabeto binario $A = \{0, 1\}$. Un cyclic tag system (CTS) di alfabeto A :

$$C = (\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1})$$

è una lista di parole binarie $\alpha_i \in A^*$.

La configurazione associata ad un CTS è data da un puntatore ad uno degli elementi di C e da una parola di alfabeto A (detta parola di stato). La computazione associata ad un CTS C a partire da una parola iniziale $w \in A$ inizia dalla configurazione che ha il puntatore sulla prima parola di C e w come parola di stato.

La transizione avviene secondo le seguenti due regole alternative determinate dal primo bit della parola di stato:

- Se $w(0) = 0$ allora la nuova configurazione avrà come elemento di C il successivo elemento di C (modulo la lunghezza di C) e come parola di stato $w(1) \dots w(n)$ (la parola w senza il primo carattere);
- Se $w(0) = 1$ allora la nuova configurazione avrà come elemento di C il successivo elemento di C (modulo la lunghezza di C) e come parola di stato $w(1) \dots w(n)\alpha_p$ (la parola w senza il primo carattere e con la parola di C cui fa riferimento il puntatore, α_p , concatenata a w).

La computazione termina quando la parola w è la parola vuota.

(1) Definire l'algoritmo formale associato ad un CTS:

- 3 *pti* (a) definire lo spazio delle configurazioni;
5 *pti* (b) definire le funzioni di input, di transizione e di output.

(2) Ogni CTS può essere simulato da una TM:

- 8 *pti* (a) fissato un CTS, definire la macchina di Turing μ che lo simula;
4 *pti* (b) definire la funzione di simulazione che mappa le configurazioni di μ su quelle del CTS (come definite al punto 1a).

(3) Ogni CTS può essere rappresentato nel lambda calcolo: sia $\langle a, b \rangle = \lambda p(p)ab$ con $a, b \in \Lambda$ e $p \notin FV(a) \cup FV(b)$. Si definisca la rappresentazione di una sequenza binaria, eventualmente vuota (se $n = 0$), $(b_n \dots b_1)$, dove $b_i \in \{0, 1\}$ con il lambda termine

$$\langle b_n \dots b_1 \rangle = \lambda x_0 \lambda x_1 \lambda z(z)x_{b_1} \dots x_{b_n}.$$

Dopo aver verificato che $\langle \langle u_0, u_1 \rangle \rangle \langle v_0, v_1 \rangle \simeq_\beta (u_0)v_0v_1u_1$ per ogni $u_0, u_1, v_0, v_1 \in \Lambda$ rispondere ai seguenti quesiti:

- (a) Rappresentare un CTS $C = (\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1})$ con una lista di sequenze binarie:
2 *pti* (i) Stabilire la codifica delle liste, dare i termini `head`, `tail` e `append`;
6 *pti* (ii) Definire un lambda-termine `rotate` che rappresenta la funzione che per ogni lista $C = (\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1})$ restituisce

$$\text{rotate}(C) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}, \alpha_0).$$

(b) Fornire la rappresentazione della la funzione di transizione mediante un lambda termine:

4 *pti* (i) rappresentare nel lambda calcolo la funzione *pop* definita in modo tale che

$$\text{pop}((w_0 w_1 \dots w_n)) = (w_1 \dots w_n);$$

4 *pti* (ii) rappresentare nel lambda calcolo la funzione *push* definita in modo tale che

$$\text{push}((w_0 w_1 \dots w_n), (a_1 \dots a_k)) = (w_1 \dots w_n a_1 \dots a_k).$$

8 *pti* (iii) rappresentare nel lambda calcolo la funzione *top* definita in modo tale che

$$\text{top}((w_0 w_1 \dots w_n)) = w_0;$$

6 *pti* (iv) per ogni CTS, una configurazione sarà data dalla lista C ruotata n -volte che indicheremo con C_n e dalla sequenza binaria w associata alla parola di stato.

Fornire il lambda termine che a partire da una coppia (C_n, w) fornisce la coppia che rappresenta la configurazione successiva nella computazione del CTS, ovvero rappresentare la funzione di transizione τ con un termine T :

$$\tau(C, w) = \begin{cases} (\text{rotate}(C), \text{push}(\text{pop}(w), \text{head}(C))) & \text{se } w(0) = 1, \\ (\text{rotate}(C), \text{pop}(w)) & \text{se } w(0) = 0. \end{cases}$$

9 *pti* (c) Utilizzando il termine T del punto precedente fornire un lambda termine che a partire dalla rappresentazione binaria di w , effettua le transizioni della CTS fino a quando la parola di stato non è la parola vuota.