

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI "ROMA TRE"  
CORSO DI STUDI IN MATEMATICA  
IN2 - MODELLI DI CALCOLO – A.A. 2006-2007  
M. PEDICINI

APPELLO B DEL 12/02/2007 – TEMPO 3H00

COGNOME \_\_\_\_\_ NOME \_\_\_\_\_ MATRICOLA \_\_\_\_\_

**Esercizio 1.** Sia  $T$  l'insieme degli alberi binari con foglie nell'insieme dei numeri naturali  $\mathbb{N}$ , definito induttivamente come:

- $leaf(n) \in T$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,
- $node(t_1, t_2) \in T$  se  $t_1, t_2 \in T$ .

Si consideri la seguente rappresentazione  $[t]$  nel lambda-calcolo per un qualsiasi albero  $t \in T$ :

- Se  $t = leaf(n)$  allora

$$[leaf(n)] := \lambda x \lambda y(x)\underline{n},$$

dove  $\underline{n}$  rappresenta il numerale di Church associato all'intero  $n \in \mathbb{N}$ ;

- Se  $t = node(T_1, T_2)$  allora

$$[node(t_1, t_2)] := \lambda x \lambda y(y)[t_1][t_2].$$

Rispondere ai seguenti quesiti:

- 4 *pti* (1) Fornire una rappresentazione della funzione:

$$IsLeaf(t) := \begin{cases} \text{true} & \text{se } t = leaf(n) \text{ per qualche } n \in \mathbb{N}, \\ \text{false} & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

per ogni  $t \in T$ .

- 8 *pti* (2) Fornire una rappresentazione della funzione  $Add(t, k)$  che per ogni albero binario  $t$  restituisce lo stesso albero con tutte le foglie sommate all'intero  $k$ .
- 6 *pti* (3) Fornire una rappresentazione della funzione  $Sum(t)$  che per ogni albero binario  $t$  restituisce un intero pari alla somma dei valori associati ad ogni foglia di  $t$ .

**Esercizio 2.** Sia  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  una funzione totale, si dice che  $f$  è ad ampie oscillazioni se per ogni  $n \in \mathbb{N}$  si ha che la cardinalità della controimmagine di  $f$ ,  $|f^{-1}(n)|$  è infinita.

- 10 *pti* (1) Mostrare che per ogni funzione ricorsiva parziale  $f$  ad ampie oscillazioni esiste una funzione ricorsiva totale  $g$  tale che

$$(f, g) : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$$

è biunivoca.

- 8 *pti* (2) Mostrare lo stesso enunciato del punto precedente dove le funzioni  $f$  e  $g$  sono funzioni ricorsive primitive (e per questo entrambe totali).