

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI "ROMA TRE"
CORSO DI STUDI IN MATEMATICA
IN2 - MODELLI DI CALCOLO – A.A. 2006-2007
M. PEDICINI

ESONERO DEL 8/11/2006 – TEMPO 2H30

COGNOME _____ NOME _____ MATRICOLA _____

Esercizio 1. *Introduciamo un nuovo modello di calcolo: l'automa a pila.*

Un PDFA (push-down finite automata) è una variante dell'automa a stati finiti, ed è definito nel modo seguente:

DEFINIZIONE: Un PDFA di alfabeto A , alfabeto della pila B e insieme degli stati Q è definito come una quadrupla (T, q_0, Z_0, F) dove

$$T : Q \times A \cup \{\epsilon\} \times B \rightarrow Q \times B^*,$$

dove ϵ rappresenta la parola vuota, $F : Q \rightarrow \{0, 1\}$, $q_0 \in Q$ è uno stato particolare detto stato iniziale, $Z_0 \in B$ è il carattere con cui è inizializzata la pila.

DESCRIZIONE DELLA COMPUTAZIONE ASSOCIATA: La pila contiene ad ogni passo di computazione una parola $w \in B^$ la funzione di transizione agisce analogamente al caso degli automi finiti in base al carattere letto nella parola di input (eventualmente ϵ), allo stato corrente e inoltre in funzione dell'ultimo carattere della pila. La transizione è determinata dal valore $T(q, a, b) = (q', w')$ consiste nell'aggiornamento dello stato corrente che da q diventa q' (come nel caso dell'automa finito), il puntatore alla posizione corrente viene avanzato se $a \neq \epsilon$ mentre resta fermo se $a = \epsilon$ e l'ultimo carattere della pila viene sostituito con la parola w' (quindi se la pila è wb si ha ww').*

È necessario richiedere che in corrispondenza del carattere letto ϵ non sia possibile applicare nessuna transizione con carattere diverso da ϵ (altrimenti si perderebbe il determinismo).

L'automa a pila termina la computazione quando ha letto l'ultimo carattere della parola di ingresso, ha effettuato la transizione associata e non può effettuare transizioni con carattere letto ϵ . La configurazione finale è data da q e dalla pila w , analogamente al caso degli automi finiti, la parola di input è accettata se $F(q) = 1$ e viene rifiutata se $F(q) = 0$.

- a) *Definire l'algoritmo formale associato ad un automa a pila (e quindi il concetto di decidibilità per PDFA).*
- b) *Valutare il numero di configurazioni possibili per un PDFA in funzione della lunghezza della parola di input.*
- c) *Dimostrare che ogni X decidibile per automa finito è anche PDFA decidibile.*
- d) *Dimostrare che l'insieme $X = \{0^p 1^p \mid p \in \mathbb{N}\}$ è PDFA-decidibile.*
- e) *Dimostrare che se X è decidibile per PDFA allora è decidibile per macchina di Turing.*
- f) *Fornire una maggiorazione per la complessità (rispetto alla macchina di Turing) degli insiemi PDFA-decidibili.*

Esercizio 2. *(facoltativo) Con le notazioni dell'esercizio 1, si consideri la seguente variante PDFA' di automa a pila, che ridefinisce il solo concetto di parola accettata dall'automa nel modo seguente:*

l'automa a pila termina la computazione quando ha letto l'ultimo carattere della parola di ingresso ed ha effettuato la transizione associata e non può effettuare transizioni con carattere letto ϵ , terminando con uno stato q e con la pila w : in questo caso la parola di input è accettata se $F(q) = 1$ e w è la parola vuota e viene rifiutata se $F(q) = 0$ oppure se w non è vuota.

Provare che X è PDFA decidibile se e solo se X è PDFA' decidibile.

Esercizio 3. Si consideri la seguente funzione $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$:

$$T(n) = \begin{cases} b & \text{se } n < 3, \\ 3T(n/3) + bn & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

- a) Mostrare che $T(n)$ è una funzione di complessità;
- b) Mostrare che $DTIME(T(n)) = DTIME(n \log(n))$.