UNIVERSITÀ DEGLI STUDI "ROMA TRE"
CORSO DI STUDI IN MATEMATICA
IN2 - MODELLI DI CALCOLO – A.A. 2006-2007

M. PEDICINI

ESONERO DEL 15/01/2007 – TEMPO 2H30

COGNOME ________________________ NOME ________________________ MATRICOLA __________________

Esercizio 1. *Dimostrare che la successione di* tribonacci *definita come segue:*

$$s(0) = 0, s(1) = 0, s(2) = 1, s(n+3) = s(n) + s(n+1) + s(n+2)$$

è una funzione ricorsiva primitiva.

Esercizio 2. *(rappresentazione della sequenza di Thue-Morse nel lambda calcolo)*

Sia $\langle a, b\rangle = \lambda p(p)ab$ *con* $a, b \in \Lambda$ *e* $p \notin FV(a) \cup FV(b)$*. Si definisca la rappresentazione di una sequenza binaria, eventualmente vuota (se* $n = 0$*),* $(b_n \ldots b_1)$*, dove* $b_i \in \{0, 1\}$ *con il lambda termine*

$$\underline{(b_n \ldots b_1)} = \lambda x_0 \lambda x_1 \lambda z(z)x_{b_1} \ldots x_{b_n}.$$

Dopo aver verificato che $(\langle u_0, u_1\rangle)\langle v_0, v_1\rangle \simeq_\beta (u_0)v_0v_1u_1$ *per ogni* $u_0, u_1, v_0, v_1 \in \Lambda$ *rispondere ai seguenti quesiti:*

a) *fornire un lambda termine* `push` *che rappresenta la funzione di due argomenti:*

$$push(b, s) = (bb_n \ldots b_0),$$

dove b *è un booleano ed* s *una sequenza binaria* $s = (b_n \ldots b_0)$*;*

b) *fornire un lambda termine* M *che verifichi il seguente schema di riduzioni:*

$$(\langle M, u\rangle)\langle M, v\rangle \to_\beta \langle M, v\rangle;$$

c) *fornire un lambda termine* `pop` *che rappresenta fortemente la funzione* pop *di un argomento,* $s = (b_n \ldots b_0)$ *definita come*

$$pop(push(b, s)) = b,$$

e indefinita se applicata alla sequenza vuota;

d) *definire tre termini del lambda calcolo* `base`, $\mathtt{step}_0$ *e* $\mathtt{step}_1$ *tali che per ogni lambda termine che rappresenta una sequenza binaria* $\underline{(b_n \ldots b_1)}$ *si abbia*

$$(((\underline{(b_n \ldots b_1)})\mathtt{step0})\mathtt{step1})\mathtt{base} \simeq_\beta (\mathtt{step}_{b_n}) \ldots (\mathtt{step}_{b_1})\mathtt{base}$$

(suggerimento: usare un analogo del termine M *al punto b));*

e) *si consideri la seguente sostituzione di bit* $1 \mapsto 10$, $0 \mapsto 01$*, utilizzando il punto precedente costruire un lambda termine* `morse` *che applicato ad una sequenza binaria* s *fornisce la sequenza di lunghezia ottenuta applicando la sostituzione di bit ad ogni bit della sequenza (esempio:* $01110 \mapsto 0110101001$*);*

f) *si definisca un lambda termine che rappresenta la funzione definita sui numeri naturali*

$$f(n) := morse^n((0)).$$