

Esercizi di Calcolo delle Probabilità' (I)

1. Si supponga di avere un'urna con 15 palline di cui 5 rosse, 8 bianche e 2 nere. Immaginando di estrarre due palline con reimmissione, si dica con quale probabilità: a) si estraggono due palline di colore diverso? b) si estrae almeno una pallina rossa?
2. Si supponga di avere un mazzo di 40 carte di cui 30 blu e 10 rosse. Si estrarre una carta: se esce carta blu si lancia una moneta altrimenti un dado regolare. Si dica con quale probabilità: a) esce testa, b) esce il numero 6.
3. Un'urna contiene 5 palline bianche, 6 nere, 4 rosse. Se ne estraggono 2. Calcolare la probabilità che siano dello stesso colore distinguendo il caso in cui le palline vengano estratte in coppia oppure singolarmente rimettendo la prima pallina estratta dall'urna.
4. Una scatola contiene due monete: la prima dà testa con probabilità $1/3$; la seconda dà testa con probabilità $2/3$. A caso si sceglie una delle due monete e la si lancia più volte. I due eventi (testa al primo lancio) e (testa al secondo lancio) sono indipendenti? Calcolare anche la probabilità che la moneta scelta sia la prima sapendo che nei primi due lanci è uscita croce.
5. Un'urna contiene 6 palline bianche. Si lancia un dado regolare e si colorano di arancione un numero di palline pari al risultato del lancio del dado. Dall'urna così modificata si estraggono a caso, con reimmissione, due palline. Qual è la probabilità che siano entrambe arancioni?
6. Si lancia una moneta ripetutamente finché non esce testa. Supponendo di sapere che la moneta è bilanciata, calcolare la probabilità
 - (a) di ottenere testa al terzo lancio;
 - (b) di ottenere testa per la prima volta al al terzo lancio (evento E_3);

- (c) di ottenere testa entro i primi n lanci;
- (d) di ottenere testa per 3 volte nei primi n lanci;
- (e) di ottenere testa la prima volta all' n -mo lancio;
- (f) del complemento dell'unione di tutti gli E_n .

Ripetere il tutto supponendo di lanciare un dado regolare (invece di una moneta) fermandosi la prima volta che esce un numero minore di 3 (quindi 1 oppure 2).

7. Un'urna contiene 18 palline, 12 delle quali sono arancioni e 6 blu. Si estraggono dall'urna 4 palline. Sapendo che 3 delle palline estratte sono arancioni, con che probabilità sono arancioni le prime due estratte? Considerare sia il caso con rimpiazzo della pallina estratta (con ripetizione) che quello senza rimpiazzo.
8. Una gravidanza extrauterina si può sviluppare 2 volte più facilmente se la donna incinta è una fumatrice piuttosto che se è non fumatrice. Se il 32% delle donne in età fertile sono fumatrici, quale percentuale di donne che sviluppano una gravidanza extrauterina sono delle fumatrici?
9. Il 98% dei neonati sopravvive al parto. Tuttavia il 15% dei parti sono cesarei, e quando si realizza un parto cesareo il neonato sopravvive nel 96% dei casi. Qual è la probabilità che il neonato di una donna che non fa parto cesareo sopravviva al parto?
10. Il 46% degli elettori di un comune si ritiene politicamente di centro, il 30% di sinistra e il 24% di destra. In una elezione recente sono andati a votare il 35% degli elettori di centro, il 62% di quelli di sinistra e il 58% di quelli di destra. Un elettore è scelto a caso. Sapendo che l'elettore ha votato alle scorse elezioni, qual è la probabilità che si tratti di un centrista? di uno di sinistra? di uno di destra?

Quale percentuale di elettori hanno partecipato alla scorsa elezione?

11. Un videogioco è costituito da tre schermate successive, di difficoltà crescente. Se il concorrente supera indenne una schermata, può passare a quella successiva altrimenti ha perso. Se supera indenne tutte e tre le schermate vince il gioco. Un giocatore supera la prima schermata con probabilità 0.4. Una volta superata la prima schermata, la probabilità che superi anche la seconda è 0.3. Superate le prime due schermate, la probabilità che vinca il gioco (quindi che superi indenne anche la terza schermata) è 0.1.
Qual è la probabilità che il giocatore vinca il gioco?

Se il giocatore ha perso, qual è la probabilità che abbia fallito alla prima schermata? e alla seconda?

12. L'urna U_1 contiene 2 palline arancioni e 4 palline di altro colore. L'urna U_2 invece contiene una pallina arancione e una di altro colore. Estraiamo una pallina a caso dalla prima urna e la mettiamo nella seconda, poi estraiamo una pallina dalla seconda urna.

Con che probabilità la pallina estratta da U_2 è arancione?

Sapendo che la pallina estratta da U_2 è arancione, con che probabilità quella trasferita dalla prima alla seconda urna è arancione?

13. Il dado A ha 4 facce rosse e 2 facce bianche, mentre il dado B ha 2 facce rosse e 4 facce bianche. Si lancia una sola volta una moneta non truccata. Se esce testa, il gioco continua con il dado A; se esce croce si usa il dado B. Mostrare che la probabilità che la faccia sia rossa a ogni lancio è $\frac{1}{2}$.

Se nei primi due lanci si ottiene il rosso, qual è la probabilità che venga rosso al terzo lancio?

Se nei primi due lanci si ottiene il rosso, qual è la probabilità che sia stato usato il dado A?

14. Un dado con le sei facce numerate, come al solito, da 1 a 6, è tuttavia sbilanciato: la probabilità della faccia i -esima è proporzionale a i .

a) Calcolare la probabilità di ciascuna delle sei facce.

Il dado viene lanciato più volte.

b) Calcolare la probabilità che nei primi tre lanci si abbia risultato **alto** (cioè ≥ 4) *esattamente* due volte e la probabilità che risultato **alto** si abbia *almeno* due volte.

c) Calcolare la probabilità condizionata che nei primi n lanci si abbia *esattamente* $n - 1$ volte risultato **alto**, sapendo che esso si è avuto *almeno* $n - 1$ volte. E studiarne il limite per $n \rightarrow \infty$.

Soluzioni

1. a) Chiamiamo N_i , B_i e R_i gli eventi estrazione di una pallina nera, di una pallina bianca, di una pallina rossa rispettivamente all' i -esima estrazione. E' chiaro che l'urna nelle due estrazioni non cambia la sua composizione, pertanto gli eventi N_1, B_1, R_1 e N_2, B_2, R_2 sono indipendenti. Inoltre si ha $P(N_i) = 2/15$, $P(B_i) = 8/15$ e $P(R_i) = 5/15$, poiche' tutti gli eventi sono equiprobabili e quindi la probabilità e' data dal numero di eventi favorevoli su quelli possibili. Abbiamo due modi per risolvere l'esercizio:

(a) Possiamo calcolare e sommare le probabilità di estrarre tutte le coppie possibili di colori diversi:

$$\begin{aligned}
 & P(B_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap N_2) \\
 & + P(N_1 \cap B_2) + P(R_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap R_2) \\
 & = P(B_1)P(R_2) + P(R_1)P(B_2) + P(B_1)P(N_2) \\
 & + P(N_1)P(B_2) + P(R_1)P(N_2) + P(N_1)P(R_2) \\
 & = 2 \cdot \frac{8}{15} \cdot \frac{5}{15} + 2 \cdot \frac{8}{15} \cdot \frac{2}{15} + 2 \cdot \frac{2}{15} \cdot \frac{5}{15} \\
 & = \frac{132}{225} = 0.586
 \end{aligned}$$

(b) In alternativa, possiamo calcolare la probabilità dell'evento estraggo una coppia di palline dello stesso colore e poi calcolare la probabilità dell'evento complementare

$$\begin{aligned}
 & 1 - \{P(B_1 \cap B_2) + P(R_1 \cap R_2) + P(N_1 \cap N_2)\} \\
 & = 1 - \left(\frac{8}{15} \cdot \frac{8}{15} + \frac{5}{15} \cdot \frac{5}{15} + \frac{2}{15} \cdot \frac{2}{15} \right) \\
 & = 1 - \left(\frac{64}{225} + \frac{25}{225} + \frac{4}{225} \right) \\
 & = 1 - \frac{93}{225} = \frac{132}{225} = 0.586
 \end{aligned}$$

b) La probabilità di estrarre almeno una pallina rossa in due estrazioni è uguale alla probabilità di estrarre una pallina rossa oppure di estrarre due palline rosse:

$$\begin{aligned}
& P(\text{almeno una pallina rossa in due estrazioni}) \\
&= P(R_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap R_2) \\
&= 2 \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{8}{15} + 2 \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{2}{15} + \frac{5}{15} \cdot \frac{5}{15} = \frac{80}{225} + \frac{20}{225} + \frac{25}{225} = 0.555
\end{aligned}$$

2. Indichiamo con B l'evento "esce carta blu", con T = "esce testa nel lancio della moneta" e con D_i , "esce faccia i nel lancio del dado", $i = 1, 2, \dots, 6$.

a) Per calcolare la probabilità dell'evento E = "esce testa nel gioco" osserviamo che $E = B \cap T$, pertanto:

$$P(E) = P(T|B) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{30}{40} = \frac{30}{80} = \frac{3}{8}$$

b) la probabilità dell'evento F = "esce numero 6 nel gioco" si calcola in modo analogo al caso precedente notando che $F = D_6 \cap B^c$:

$$P(F) = P(D_6|B^c) \cdot P(B^c) = \frac{1}{6} \cdot \frac{10}{40} = \frac{1}{24}$$

3. Indichiamo con B , N e R rispettivamente i seguenti eventi: si estrae pallina bianca, nera e rossa. Sia inoltre (A, B) l'evento: alla prima estrazione si ottiene la pallina di colore A mentre nella seconda esce una pallina di colore B . Pertanto si può osservare che siamo interessati a calcolare la probabilità del seguente evento

$$(B, B) \cup (N, N) \cup (R, R)$$

Nel primo caso, ovvero estraendo in coppia le palline, alla prima estrazione l'urna è composta da 15 palline di cui 5 bianche, 6 nere e 4 rosse e ad esempio $P(B) = 5/15$ poiché tutti gli eventi sono equiprobabili e quindi la probabilità è data dal numero di eventi favorevoli su quelli possibili. A questo punto alla seconda estrazione l'urna contiene 4 palline bianche, 6 nere e 4 rosse, per cui $P(B) = 4/14$. Ora è chiaro che

$$P((B, B)) = \frac{1}{3} \times \frac{4}{14}$$

e un ragionamento analogo può essere utilizzato per calcolare $P((N, N))$ e $P((R, R))$. In definitiva si ha che

$$\begin{aligned}
P((B, B) \cup (N, N) \cup (R, R)) &= P((B, B)) + P((N, N)) + P((R, R)) \\
&= \frac{5}{15} \times \frac{4}{14} + \frac{6}{15} \times \frac{5}{14} + \frac{4}{15} \times \frac{3}{14} \\
&= 0.295
\end{aligned}$$

Se invece considerassimo uno schema d'estrazione in cui la pallina estratta viene reinserita all'interno dell'urna, allora la probabilita' d'estrazione non cambia da un'estrazione all'altra. Quindi ad esempio

$$P((B, B)) = \frac{5}{15} \times \frac{5}{15}$$

per cui

$$\begin{aligned} P((B, B) \cup (N, N) \cup (R, R)) &= P((B, B)) + P((N, N)) + P((R, R)) \\ &= \left(\frac{5}{15}\right)^2 + \left(\frac{6}{15}\right)^2 + \left(\frac{4}{15}\right)^2 \\ &= 0.342 \end{aligned}$$

4. Consideriamo i seguenti eventi:

M_i = (la moneta scelta è l' i^a), $i = 1, 2$.

T_j = (testa al j^o lancio).

Si ha pertanto che $P(M_1) = 1/2 = P(M_2)$, $P(T_i|M_1) = 1/3$, $P(T_i|M_2) = 2/3$. Adesso osservando che $T_i = (M_1 \cap T_i) \cup (M_2 \cap T_i)$ possiamo scrivere che

$P(T_i) = P(M_1) P(T_i|M_1) + P(M_2) P(T_i|M_2) = \frac{1}{2} \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$ e analogamente essendo $T_1 \cap T_2 = (M_1 \cap T_1 \cap T_2) \cup (M_2 \cap T_1 \cap T_2)$ si ha

$P(T_1 \cap T_2) = P(M_1) P(T_1 \cap T_2|M_1) + P(M_2) P(T_1 \cap T_2|M_2) = \frac{1}{2} \frac{1}{9} + \frac{1}{2} \frac{4}{9} = \frac{5}{18} > \frac{1}{2} \frac{1}{2} = P(T_1) P(T_2)$

Quindi in conclusione T_1 e T_2 sono dipendenti.

Posto C_j = (croce al j^o lancio), applicando la formula di Bayes otteniamo che

$$P(M_1|C_1 \cap C_2) = \frac{P(M_1) P(C_1 \cap C_2|M_1)}{P(M_1) P(C_1 \cap C_2|M_1) + P(M_2) P(C_1 \cap C_2|M_2)} = \frac{4}{5}$$

5. Sia

X = "num. di palline colorate di arancione" = "risultato del lancio del dado"

Notiamo che $(2a) =$ (le 2 palline estratte sono arancioni) $= \cup_{x=1}^6 (X = x, 2a)$ e quindi

$$\begin{aligned} P(2a) &= \sum_{x=1}^6 P(X = x, 2a) = \sum_{x=1}^6 P(X = x) P(2a|X = x) \\ &= \sum_{x=1}^6 \frac{1}{6} \left(\frac{x}{6}\right)^2 = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + 6^2}{216} = \frac{91}{216}. \end{aligned}$$

6. Innanzi tutto gli eventi considerati ai punti (a) e (b) coincidono: l'evento "si ottiene testa al terzo lancio" coincide con E_3 perchè non posso aver avuto testa anche in lanci precedenti, altrimenti mi sarei fermato prima. Per lo stesso motivo, l'evento considerato al punto (d) non pu verificarsi, quindi impossibile ed ha probabilità nulla.

In pratica dobbiamo trovare

- $P(E_3)$ per rispondere ai punti (a) e (b);
- $P(E_n)$ per rispondere al punto (e);
- $P(\bigcup_{k=1}^n E_k)$ per rispondere al punto (c);
- $P((\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)^c)$ per rispondere al punto (f).

Per E_3 basta limitarsi a considerare quello che succede nei primi 3 lanci: i casi possibili sono 2^3 con un solo caso favorevole (CCT), quindi

$$P(E_3) = \frac{1}{8}.$$

Un altro modo di ottenere il risultato notando che i lanci danno luogo ad eventi indipendenti. In ogni lancio ho T con probabilità $1/2$ e C con probabilit $1/2$, quindi

$$P(E_3) = P(CCT) = P(C) \cdot P(C) \cdot P(T) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}.$$

Nel caso del lancio del dado, ad ogni lancio esce 1 o 2 con probabilità $\frac{1}{3}$ e quindi

$$P(E_3) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{1}{3}.$$

Se indichiamo con p la probabilità dell'evento che interessa nella singola prova (ad esempio $p = \frac{1}{2}$ se interessa T nel lancio della moneta; $p = \frac{1}{3}$ se interessa 1 o 2 nel lancio di un dado, e cos via), allora

$$P(E_3) = (1 - p)^2 p.$$

Nel seguito facciamo tutti i conti considerando un generico $p \in (0, 1)$.

Per calcolare la probabilità di E_n :

$$P(E_n) = P(\underbrace{C \cdots C}_{n-1 \text{ volte}} T) = \underbrace{(1-p) \cdots (1-p)}_{n-1 \text{ volte}} p = (1-p)^{n-1} p.$$

Quindi nel caso del lancio della moneta la probabilità è $\frac{1}{2^n}$, nel caso del dado $(\frac{2}{3})^{n-1} \frac{1}{3}$.

Gli eventi E_1, E_2, \dots sono a due a due incompatibili (se esce T la prima volta al terzo lancio, non può uscire la prima volta al quinto), per cui

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) &= \sum_{k=1}^n P(E_k) \\ &= \sum_{k=1}^n (1-p)^{k-1} p \sum_{s=0}^{n-1} (1-p)^s \\ &= p \cdot \frac{1 - (1-p)^n}{1 - (1-p)} = 1 - (1-p)^n \end{aligned}$$

(nel penultimo passaggio abbiamo usato la famosa formula per la somma delle prime J potenze di un numero $\sum_{j=0}^J x^j = \frac{1-x^{J+1}}{1-x}$).

Di conseguenza $P(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = 1$ per cui $P((\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)^c) = 0$.

L'evento $(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)^c =$ “non esce mai testa” è quasi impossibile.

7. Indichiamo con

E = le prime due estratte sono arancioni

F = sono estratte 3 palline arancioni

e cerchiamo $P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$.

Si vede facilmente che

$$E \cap F = \{\text{arancione, arancione, arancione, blu}\} \cup \{\text{arancione, arancione, blu, arancione}\}$$

Caso con ripetizione (rimpiazzo):

uno schema di prove ripetute con probabilità di successo $p = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$, quindi

$$P(F) = \binom{4}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{32}{81}.$$

Sappiamo anche che i risultati relativi ad estrazioni diverse sono indipendenti, quindi per gli eventi che compongono $E \cap F$ si ha

$$\begin{aligned} P(\{\text{arancione, arancione, arancione, blu}\}) &= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{8}{81} \\ P(\{\text{arancione, arancione, blu, arancione}\}) &= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{81} \end{aligned}$$

per cui $P(E \cap F) = \frac{16}{81}$ e $P(E|F) = \frac{16/81}{32/81} = \frac{1}{2}$.

Caso senza ripetizione:

Sappiamo dalle cose viste a lezione che in questo caso $P(F) = \frac{\binom{12}{3}\binom{6}{1}}{\binom{18}{4}} = \frac{31680}{73440}$.

Per gli eventi che compongono $E \cap F$ si ha

$$P(\{\text{arancione, arancione, arancione, blu}\}) = \frac{12}{18} \cdot \frac{11}{17} \cdot \frac{10}{16} \cdot \frac{6}{15} = \frac{7920}{73440}$$

$$P(\{\text{arancione, arancione, blu, arancione}\}) = \frac{12}{18} \cdot \frac{11}{17} \cdot \frac{6}{16} \cdot \frac{10}{15} = \frac{7920}{73440}$$

per cui $P(E \cap F) = \frac{15840}{73440}$ e $P(E|F) = \frac{15840/73440}{31680/73440} = \frac{1}{2}$.

8. Indichiamo gli eventi come segue:

F = la donna incinta è una fumatrice

E = la gravidanza è extrauterina.

Dai dati del problema sappiamo che $P(E|F) = 2 \cdot P(E|F^c)$ e che $P(F) = 0.32$, si richiede di calcolare $P(F|E)$.

Per la formula di Bayes possiamo ottenere

$$\begin{aligned} P(F|E) &= \frac{P(E|F) \cdot P(F)}{P(E|F) \cdot P(F) + P(E|F^c) \cdot P(F^c)} \\ &= \frac{2 \cdot P(E|F^c) \cdot 0.32}{2 \cdot P(E|F^c) \cdot 0.32 + P(E|F^c) \cdot (1 - 0.32)} \\ &= \frac{P(E|F^c) \cdot 0.64}{P(E|F^c) \cdot (0.64 + 0.68)} = \frac{0.64}{1.32} \simeq 0.48. \end{aligned}$$

9. Indichiamo gli eventi come segue:

S = il neonato sopravvive al parto

C = il parto è cesareo.

Dai dati del problema sappiamo che $P(S) = 0.98$, $P(C) = 0.15$ e $P(S|C) = 0.96$; si richiede di calcolare $P(S|C^c)$.

Dalla legge delle probabilità composte si ricava che

$$P(S) = P(S|C) \cdot P(C) + P(S|C^c) \cdot P(C^c)$$

per cui abbiamo

$$0.98 = 0.96 \cdot 0.15 + P(S|C^c) \cdot 0.85 \quad \text{e quindi} \quad P(S|C^c) = \frac{0.98 - 0.96 \cdot 0.15}{0.85} \simeq 0.9835$$

10. Con notazione ovvia indichiamo con C, D, S l'evento che l'elettore è di centro, destra e sinistra. Indichiamo anche con V l'evento "l'elettore è andato a votare".

I dati del problema dicono che $P(C) = 0.46$, $P(S) = 0.30$, $P(D) = 0.24$, che $P(V|C) = 0.35$, $P(V|S) = 0.62$ e $P(V|D) = 0.58$.

La probabilità $P(V)$ richiesta nell'ultima frase, può essere trovata usando la legge delle probabilità composte

$$\begin{aligned} P(V) &= P(V|C) \cdot P(C) + P(V|S) \cdot P(S) + P(V|D) \cdot P(D) \\ &= 0.35 \cdot 0.46 + 0.62 \cdot 0.30 + 0.58 \cdot 0.24 = 0.4862. \end{aligned}$$

Le probabilità condizionate $P(C|V)$, $P(S|V)$ e $P(D|V)$ possono essere ottenute tramite la formula di Bayes: per quanto riguarda la prima si ha

$$P(C|V) = \frac{P(V|C) \cdot P(C)}{P(V)} = \frac{0.35 \cdot 0.46}{0.4862} \simeq 0.33.$$

In modo analogo si ottiene $P(S|V) \simeq 0.38$ e $P(D|V) \simeq 0.29$.

11. Dai dati abbiamo, con notazione ovvia,

$$P(I) = 0.4 \quad P(II|I) = 0.3 \quad P(III|I \cap II) = 0.1.$$

La probabilità che il giocatore superi tutte e tre le schermate (e quindi che vinca il gioco)

$$P(I \cap II \cap III) = P(I) \cdot P(II|I) \cdot P(III|I \cap II) = 0.4 \cdot 0.3 \cdot 0.1 = 0.012$$

e quindi la probabilità che perda il gioco è

$$P(\text{perde}) = 1 - P(I \cap II \cap III) = 0.988.$$

Il giocatore fallisce alla prima schermata se si verifica l'evento I^c ; fallisce alla seconda se si verifica $I \cap II^c$ e fallisce alla terza se si verifica $I \cap II \cap III^c$. Ognuno di questi tre eventi è contenuto nell'evento "perde". Quindi

$$\begin{aligned} P(I^c|\text{perde}) &= \frac{P(I^c)}{P(\text{perde})} = \frac{0.6}{0.988} \simeq 0.61 \\ P(I \cap II^c|\text{perde}) &= \frac{P(I \cap II^c)}{P(\text{perde})} = \frac{P(I) \cdot P(II^c|I)}{P(\text{perde})} = \frac{0.4 \cdot 0.7}{0.988} \simeq 0.28 \\ P(I \cap II \cap III^c|\text{perde}) &= \frac{P(I \cap II \cap III^c)}{P(\text{perde})} = \frac{P(I) \cdot P(II|I) \cdot P(III^c|I \cap II)}{P(\text{perde})} \\ &= \frac{0.4 \cdot 0.3 \cdot 0.9}{0.988} \simeq 0.11 \end{aligned}$$

12. Indichiamo con A_1 l'evento "la pallina estratta dall'urna U_1 è arancione" e analogamente A_2 per la pallina estratta dall'urna U_2 .

La probabilità di A_2 varia a seconda di cosa è successo all'estrazione dalla prima urna, in particolare

$$P(A_2|A_1) = \frac{2}{3} \quad P(A_2|A_1^c) = \frac{1}{3}.$$

Data la composizione iniziale dell'urna U_1 , si ha $P(A_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (e, ovviamente, $P(A_1^c) = \frac{2}{3}$).

Possiamo quindi trovare $P(A_2)$ usando la legge delle probabilità composte

$$P(A_2) = P(A_2|A_1) \cdot P(A_1) + P(A_2|A_1^c) \cdot P(A_1^c) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

Per la risposta al secondo quesito utilizziamo la formula di Bayes

$$P(A_1|A_2) = \frac{P(A_2|A_1) \cdot P(A_1)}{P(A_2)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{2}.$$

13. Indichiamo con R_n l'evento "all' n -esimo lancio del dado esce faccia rossa" e, ovviamente, con T l'evento "la moneta ha dato testa".

Ovviamente, per ogni n (e quindi ad ogni lancio) si ha $P(R_n|T) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, $P(R_n|C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, per cui

$$P(R_n) = P(R_n|T) \cdot P(T) + P(R_n|C) \cdot P(C) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Se si verifica l'evento T allora

$$P(R_1 \cap R_2|T) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}, \quad P(R_1 \cap R_2 \cap R_3|T) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27};$$

analogamente se si verifica C si ha

$$P(R_1 \cap R_2|C) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}, \quad P(R_1 \cap R_2 \cap R_3|C) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27};$$

Di conseguenza

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1 \cap R_2|T)P(T) + P(R_1 \cap R_2|C)P(C) = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{18}$$

$$P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \dots = \frac{9}{54} = \frac{3}{18}.$$

Possiamo quindi calcolare

$$P(R_3|R_1 \cap R_2) = \frac{P(R_1 \cap R_2 \cap R_3)}{P(R_1 \cap R_2)} = \frac{3/18}{5/18} = \frac{3}{5}.$$

Per rispondere all'ultimo quesito usiamo la formula di Bayes:

$$P(T|R_1 \cap R_2) = \frac{P(T) \cdot P(R_1 \cap R_2|T)}{P(R_1 \cap R_2)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9}}{5/18} = \frac{4}{5}.$$

14. a) $P(i) = ki$, $i = 1, \dots, 6$.

$$\sum_{i=1}^6 P(i) = k \sum_{i=1}^6 i = 21k = 1 \implies k = 1/21.$$

b) Sia $p = P(\text{ris. alto}) = P(4) + P(5) + P(6) = (4 + 5 + 6)/21 = 5/7$.

$$P(\text{esatt. 2 alti su 3}) = 3p^2q.$$

$$P(\text{almeno 2 alti su 3}) = P(\text{esatt. 2 alti su 3}) + P(\text{esatt. 3 alti su 3}) = 3p^2q + p^3 = p^2(3q + p).$$

c) $P(\text{esatt. } n - 1 \text{ alti su } n) = np^{n-1}q.$

$$P(\text{almeno } n - 1 \text{ alti su } n) = P(\text{esatt. } n - 1 \text{ alti su } n) + P(\text{esatt. } n \text{ alti su } n) = np^{n-1}q + p^n = p^{n-1}(nq + p).$$

$$P(\text{esatt. } n - 1 \text{ alti su } n | \text{almeno } n - 1 \text{ alti su } n) =$$

$$P(\text{esatt. } n - 1 \text{ alti su } n) / P(\text{almeno } n - 1 \text{ alti su } n) =$$

$$\frac{np^{n-1}q}{p^{n-1}(nq+p)} = \frac{nq}{nq+p} \longrightarrow 1.$$